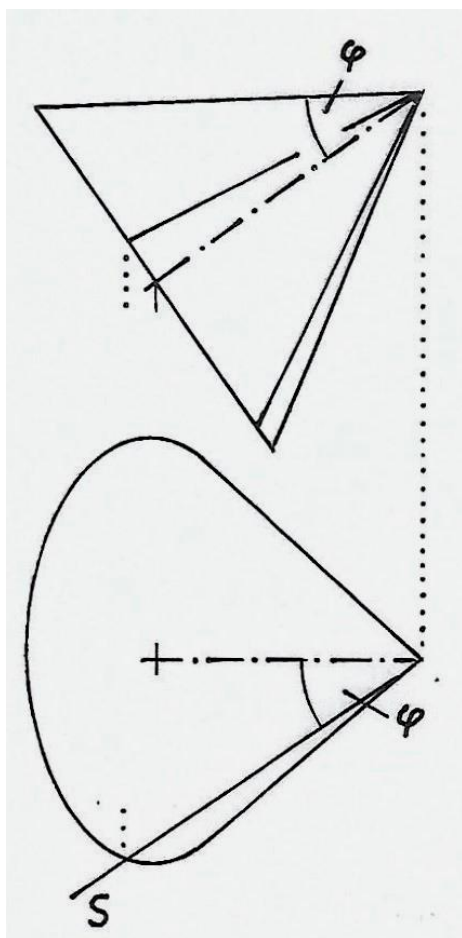


EGY „REJTETT” SZÖGTÉTEL

Hajdu Endre

Ha megkérdezzük egy az ábrázoló geometriában valamelyest járatos diákot, egyetemi hallgatót arról, hogy egy szögnek a képsíkon lévő vetülete milyen esetben mutatja a szög valódi nagyságát, szinte biztosan azt válaszolja, hogy akkor, ha a szög szárai párhuzamosak a képsíkkal. Tájékozottabbak azt is megemlítik, hogy ha a szög derékszög, s az egyik szögcszár párhuzamos a képsíkkal, továbbá a másik szár tetszőleges helyzetű, de nem merőleges a képsíkra, a szög vetülete abban az esetben is valódi nagyságot, derékszöget mutat. Az ismertebb tankönyvek – legalábbis az általam ismertek – nem említik, hogy a helyes válasz a föltett kérdésre bonyolultabb ennél. 1993-ban foglalkoztam a problémával, s a kérdés vizsgálatának indokoltságát az mutatta igazán, hogy dolgozatomban az InformationsBlätter für Darstellende Geometrie - ben [1] jelent meg. Az ugyan könnyen belátható, hogy ha egy φ szög egyik szára a képsíkhhoz viszonyítva általános helyzetű, akkor a másik szár helyzetei φ fél-nyílásszögű forgáskúpot alkotnak, melynek vetületén találunk olyan alkotó-vetületet, mely a másik szár képével szintén φ szöget zár be; más szóval: létezik olyan S vetítősík, mely a kúpból a kívánt tulajdonságú alkotót metszi ki (1. ábra).

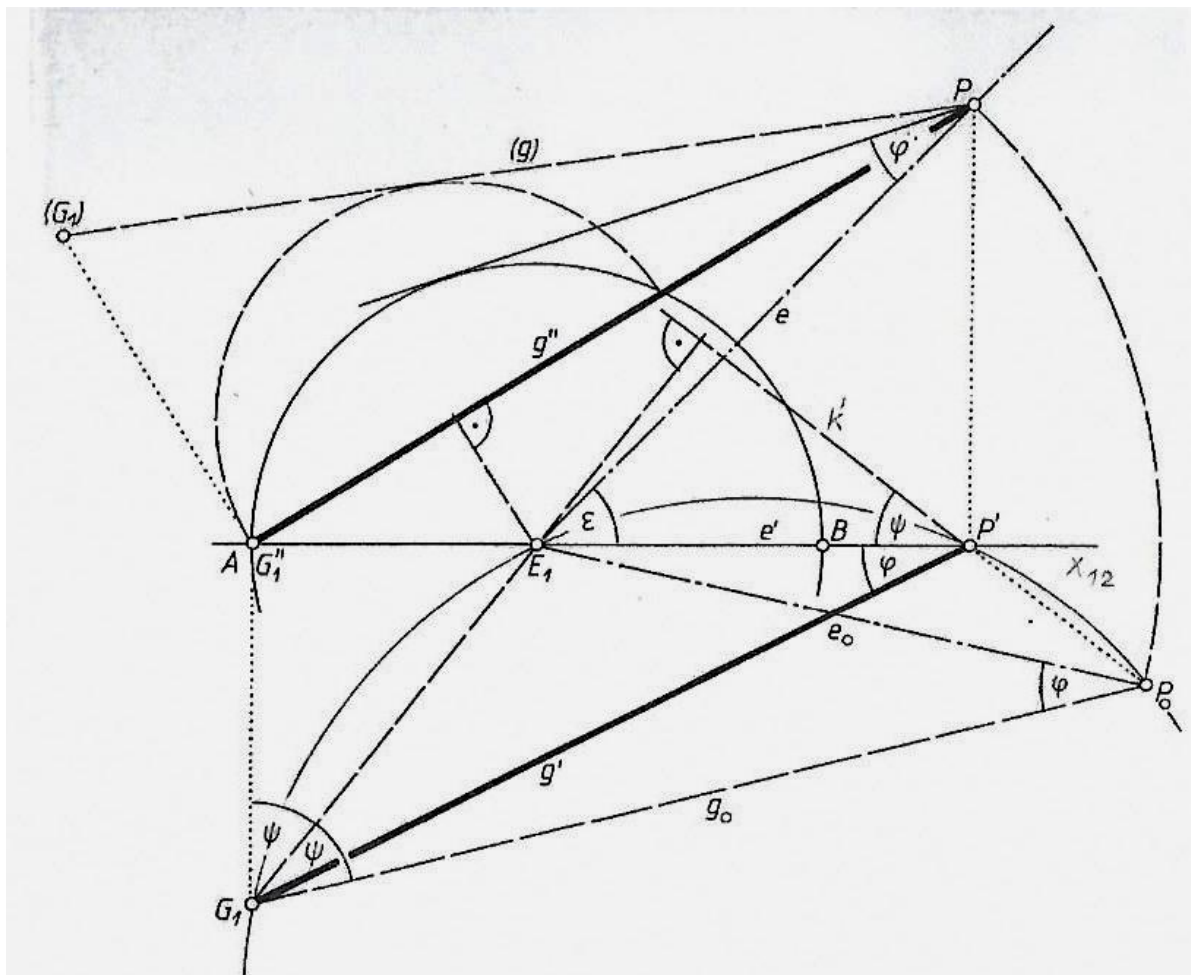


1. ábra

Nem közismertnek, ilyen értelemben „rejtettnek” csupán ezen alkotó egy különleges vetületi tulajdonsága mondható, mely szerkeszthetőségét megkönnyíti.

Az alábbiakban az eredeti dolgozat ábráinak és rövidített szövegének fölhasználásával foglalom össze a lényeget.

Legyen a φ szög két szárának egyenese e és g . A második képsíkban lévő e egyenes első képsíkszöge ε , nyompontja E_1 (2. ábra).



2. ábra

A g egyenes azon helyzetét keressük, melynél a szög vetülete – első képe – valódi nagyságot mutat.

A g egyenes lehetséges helyzetei – a korábbiak szerint – egy P csúcú, φ félnyílásszögű kúpot alkotnak, melynek egy 2. kontúralkotóját ábrázolja csak az ábra. A kúpot egy belülről érintő, E_1 középpontú gömböt a második képsík fő körben metszi, melynek a képtengellyel közös pontjai A és B . Állítás: a g szög szár keresett helyzetének második képe a PA egyenes, valamint az ábrán fel nem tüntetett PB egyenes. A g egyenes első képét az egyenes második vetítősíkja által a gömbből kimetszett kör képsíkba forgatása révén is kaphatjuk. Azt

kell belátnunk, hogy ennek a kúpalkotónak az első képe is φ szöget zár be az e egyenes első képével. A g egyenest és e -t, vagyis a szöget síkjának első E_1G_1 nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk ($E_1P = E_1P_0$) annak belátása végett, hogy g' és e' egymással bezárt szöge is φ . Vegyük észre, hogy egyrészt a P' pontnál lévő ψ szög egyenlő az AG_1E_1 szöggel (az egymásra merőleges szögszárak miatt), másrészt, mivel G_1A és G_1P a beírt gömbhöz a G_1 pontból indított érintők, ezért a G_1E_1 egyenessel egyenlő ψ szöget zárnak be, következésképpen $\angle E_1G_1P_0 + \angle E_1P_0P' = \psi + (180^\circ - \psi) = 180^\circ$, ezért $E_1G_1P_0P'$ húrnégyszög, így a P_0 és a P' pontoknál lévő szögek ugyanazon G_1E_1 húrhoz tartozó φ kerületi szögek. Egy tetszőleges $0 < \varphi < 90^\circ$ - hoz a g szögszárnak négy helyzete tartozik általában, az e szögszár vetítősíkjának egy-egy oldalán lévő két helyzet azonos első vetítősíkba esik.

[2]-ben a keresett szögszár-helyzetek első képsíkszögére az alábbi képletek találhatók – saját jelöléseimmal – :

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\cos \varepsilon + \sin \varphi}\right), \psi_2 = \arctg\left(\frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\cos \varepsilon - \sin \varphi}\right).$$

Ezeknek helyessége a 2. ábráról is leolvasható. Végül arra a kérdésre, hogy egy általános helyzetű φ szögszár esetén hogyan szerkeszthető meg a másik szögszár a vetületre vonatkozó feltétellel (vagyis, hogy a vetület valódi nagyságot mutasson), a válasz:

- a keresett szögszár első képe φ szöget zárjon be az adott szögszár első képével,
- a keresett szögszár második képe a fentiekben értelmezett A vagy B pont és a szög csúcspontjának összekötő egyenese.

Irodalom:

- [1] – **Endre HAJDU**: Über Winkel, die sich in der Projektion unverzerrt abbilden.
IBDG 2/1993.

- [2] – **Galgóczi Gyula**: [Szög és vetülete egyenlőségéről.](#)

Sopron, 2021. XII. 20.